Série d'exercices n°5

Solution de l'exercice 1

Soit m_1 et m_2 les masses d'eau à la températures T_1 et T_2, c la capacité calorifique massique de l'eau. On suppose qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. On peut donc écrire :

$$Q_1 + Q_2 = 0,$$

où Q_1 et Q_2 sont les quantités de chaleur reçues par les masses d'eau 1 et 2.

$$\begin{aligned} m_1 c\,(T_{\text{fin}} - T_1) + m_2 c\,(T_{\text{fin}} - T_2) &= 0, \\ \Rightarrow (m_1 + m_2)\,T_{\text{fin}} - m_1 T_1 - m_2 T_2 &= 0, \\ \Rightarrow T_1 &= \frac{(m_1 + m_2)\,T_{\text{fin}} - m_2 T_2}{m_1}. \end{aligned}$$

AN : $T_1 = 14\,°\text{C}$.

Solution de l'exercice 2

1. Supposons que la chaleur provenant de la centrale est transférée au circuit de refroidissement en un point donné (voir schéma de l'énoncé), que l'on notera A. L'eau dans le circuit est à la température $T_{\text{r,amont}}$ juste en amont du point A, et à la température T_{c} juste en aval. Considérons un court laps de temps $\mathrm{d}t$. Le volume d'eau $\mathrm{d}V$ qui sera réchauffé par $\dot{Q}_{\text{c}}$ pendant $\mathrm{d}t$ correspond au volume d'eau qui traverse la section du circuit de refroidissement au niveau du point A, à savoir :

   $$\mathrm{d}V = D_{\text{c}}\mathrm{d}t.$$

   Or, pendant $\mathrm{d}t$, ce volume reçoit la chaleur $\delta Q_{\text{c}} = \dot{Q}_{\text{c}}\mathrm{d}t$, ce qui augmente sa température de $\Delta T = T_{\text{c}} - T_{\text{r,amont}}$.

   $$c\rho\,\mathrm{d}V\,\Delta T = \dot{Q}_{\text{c}}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\dot{Q}_{\text{c}}}{c\rho D_{\text{c}}},$$

   avec c la chaleur spécifique de l'eau et ρ la masse volumique de l'eau. On en déduit :

   $$T_{\text{c}} = T_{\text{r,amont}} + \frac{\dot{Q}_{\text{c}}}{c\rho D_{\text{c}}}.$$

2. De même qu'à la question précédente, considérons un court laps de temps $\mathrm{d}t$, et regardons ce qu'il se passe au point où l'eau du circuit de refroidissement est rejetée dans la rivière. Pendant le temps $\mathrm{d}t$, le volume d'eau $\mathrm{d}V_{\text{res}} = D_{\text{res}}\mathrm{d}t$ provenant de la rivière se mélange au volume d'eau $\mathrm{d}V_{\text{c}} = D_{\text{c}}\mathrm{d}t$ provenant du circuit de refroidissement. Ces deux volumes, dont les températures avant mélange valent respectivement $T_{\text{r,amont}}$ et T_{c}, se thermalisent progressivement entre eux jusqu'à atteindre la température d'équilibre $T_{\text{r,aval}}$. Le bilan des échanges de chaleur permet d'écrire :

   $$\rho\,\mathrm{d}V_{\text{res}}T_{\text{r,amont}} + \rho\,\mathrm{d}V_{\text{c}}T_{\text{c}} = \rho\,(\mathrm{d}V_{\text{res}} + \mathrm{d}V_{\text{c}})T_{\text{r,aval}},$$

d'où :

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{r,aval}} &= \frac{dV_{\mathrm{res}} T_{\mathrm{r,amont}} + \mathrm{d}V_{\mathrm{c}} T_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}V_{\mathrm{res}} + \mathrm{d}V_{\mathrm{c}}} \\ &= \frac{D_{\mathrm{res}} T_{\mathrm{r,amont}} + D_{\mathrm{c}} T_{\mathrm{c}}}{D_{\mathrm{res}} + D_{\mathrm{c}}} \\ &= \frac{D_{\mathrm{res}} T_{\mathrm{r,amont}} + D_{\mathrm{c}} T_{\mathrm{r,amont}} + \dot{Q}_{\mathrm{c}}/(c\rho)}{D_{\mathrm{res}} + D_{\mathrm{c}}} \\ &= T_{\mathrm{r,amont}} + \frac{\dot{Q}_{\mathrm{c}}}{c\rho D_{\mathrm{r}}}, \end{aligned}$$

où l'on remplacé T_{c} par son expression trouvée à la question 1, et où l'on a utilisé le fait que $D_{\mathrm{res}} + D_{\mathrm{c}} = D_{\mathrm{r}}$.

3. On peut appliquer le même raisonnement qu'à la question 1, en remplaçant D_{c} par D_{r} (puisque l'on suppose que l'on dévie toute l'eau de la rivière dans le circuit de refroidissement). La température de l'eau en sortie du circuit de refroidissement, et donc en aval de la centrale, vaut ainsi :

$$T_{\mathrm{r,aval}} = T_{\mathrm{c}} = T_{\mathrm{r,amont}} + \frac{\dot{Q}_{\mathrm{c}}}{c\rho D_{\mathrm{r}}}.$$

Il s'agit bien de la même expression que celle trouvée à la question 2. On voit ainsi que le débit ponctionné dans la rivière pour alimenter le circuit de refroidissement n'a pas d'influence sur la température du cours d'eau en aval de la centrale. On aurait simplement pu remarquer que le résultat obtenu à la question 2 est indépendant de D_{c} et ne dépend que de D_{r}.

Solution de l'exercice 3

On suppose que les transformations sont quasi-statiques, c'est-à-dire qu'on les effectue suffisamment lentement pour que la pression à l'intérieur du piston s'égalise avec la pression externe à chaque instant. Pour calculer le travail reçu par le piston le long des trois chemins proposés, il suffit donc d'intégrer l'expression $\delta W = -P\mathrm{d}V$ dans le diagramme (P,V) en suivant les chemins.

Transformation AB La compression AB étant isotherme, on a $nRT = PV = \text{cste}$, et donc :

$$P\mathrm{d}V = \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V.$$

Le travail fournit au gaz le long du chemin AB vaut donc :

$$W_{\mathrm{AB}} = -\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} P\,\mathrm{d}V = -nRT_{\mathrm{A}} \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_{\mathrm{A}} \ln \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}.$$

En utilisant le fait que $V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}}/P_{\mathrm{A}}$ (puisque $PV = \text{cste}$), on obtient finalement :

$$W_{\mathrm{AB}} = nRT_{\mathrm{A}} \ln \frac{P_{\mathrm{B}}}{P_{\mathrm{A}}} = 4014{,}3\,\mathrm{J}.$$

Transformation ADB La compression ADB se compose de la transformation isochore AD dont le travail est nul (puisque $V = \text{cste}$ et donc $\mathrm{d}V = 0$), suivie de la compression isobare DB. On obtient donc :

$$W_{\mathrm{ADB}} = W_{\mathrm{DB}} = -\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} P\mathrm{d}V = -P_{\mathrm{B}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}).$$

En utilisant les faits que $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$ et $V_\mathrm{A} = nRT_\mathrm{A}/P_\mathrm{A}$, on trouve :

$$W_\mathrm{ADB} = -nRT_\mathrm{A}\left(1 - \frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{A}}\right) = 9976{,}8\,\mathrm{J}.$$

Transformation ACB La compression ACB est la succession d'une transformation isobare (AC) et d'une transformation isochore (CB). Ainsi :

$$W_\mathrm{ACB} = W_\mathrm{AC} = -P_\mathrm{A}(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) = -nRT_\mathrm{A}\left(\frac{P_\mathrm{A}}{P_\mathrm{B}} - 1\right) = 1995{,}4\,\mathrm{J}.$$

On constate que le travail reçu par le système est différent le long des trois chemins : il n'existe donc pas de fonction d'état travail $W(T,P)$.

Solution de l'exercice 4

1. Isochore : $\delta W = -pdV = 0 \Rightarrow W_{isochore} = 0$
2. Isobare : $\delta W = -pdV \Rightarrow W = \int -pdV \;\; p = cte = p_1$ donc $W_{isobare} = -p_1(V_2 - V_1)$
3. Isotherme : $\delta W = -p\mathrm{d}V$ et on peut exprimer la pression en fonction du volume :

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$$

avec $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$. On en déduit :

$$W_{isotherme} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V-b}\mathrm{d}V + \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2}\mathrm{d}V = -RT\ln\frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$